# MPSI - Informatique Tronc Commun
# Cours 14 - Représentation des nombres entiers

## 1 Écriture binaire

### 1.1 Décoder une écriture binaire

Une écriture en base 2 est une suite $(b_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ de zéros et de uns ($\forall i \in [\![0, n-1]\!], b_i \in \{0,1\}$).

Si on numérote **de droite à gauche** les chiffres d'une écriture binaire $b_{n-1} \dots b_1 b_0$ on peut lui associer le nombre entier suivant :

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2^i \times b_i$$

**Exemple 1** Regardons à quel nombre entier correspond l'écriture binaire 101010.

| Chiffre $b_i$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Position $i$ | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| $2^i$ | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 |
| $2^i \times b_i$ | 32 | 0 | 8 | 0 | 2 | 0 |

Cette écriture binaire correspond donc à

$$32 + 8 + 2 = 42$$

**Exercice 2** À quel entier correspond l'écriture binaire 1111000 ?

**Exercice 3** À quel entier correspond l'écriture binaire 110110 ?

### Puissances de 2

Vu qu'on va constamment manipuler des puissances de 2 dans ce chapitre, il peut être pratique de connaître par cœur quelles sont les premières puissances de 2 (ou au moins de savoir les retrouver *très* rapidement).

| **i** | $\mathbf{2^i}$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 8 |
| 4 | 16 |
| 5 | 32 |
| 6 | 64 |
| 7 | 128 |
| 8 | 256 |
| 9 | 512 |
| 10 | 1024 |



### 1.2 Encoder en binaire

Pour un entier naturel, il existe au moins deux méthodes pour trouver quelle est son écriture en binaire.

#### 1.2.1 De gauche à droite

**Méthode 4 : encoder en binaire de gauche à droite** Soit $k \in \mathbb{N}$ le nombre que l'on veut encoder en binaire. On peut commencer par lister toutes les puissances de 2 qui sont inférieures ou égales à $k$, puis, en commençant par la plus grande :

— Si $k \geqslant 2^i$ alors on veut utiliser $2^i$ dans l'écriture binaire de $k$. On pose $b_i = 1$ et on passe au $i$ suivant (c'est à dire à $i-1$) pour encoder ce qui reste de $k$ (à savoir $k - 2^i$).

— Si $k < 2^i$, alors on ne veut pas utiliser $2^i$ dans l'écriture binaire de $k$. On pose $b_i = 0$ et on passe au $i$ suivant (c'est à dire à $i-1$) pour encoder ce qui reste de $k$ (à savoir $k$).

**Exemple 5** Encodons en binaire l'entier 196. La plus grande puissance de 2 qui est inférieure ou égale à 196 est $128 = 2^7$. On trace donc le tableau suivant, qu'on va remplir au fur et à mesure qu'on calcule, de gauche à droite, l'écriture binaire de 196.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Position $i$ | | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| $2^i$ | | 128 | 64 | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 |
| Nombre restant à encoder | 196 | 68 | 4 | 4 | 4 | 4 | 0 | 0 | 0 |
| Chiffre $b_i$ | | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

L'écriture en binaire de 196 est donc 11000100.

**Exercice 6** En utilisant la même méthode que ci-dessus, donner l'écriture en binaire de 87.

#### 1.2.2 De droite à gauche

**Propriété 7**

— Un nombre entier est pair si et seulement si son écriture en binaire finit par 0.

— Un nombre entier est impair si et seulement si son écriture en binaire finit par 1.

**Propriété 8** Faire la division entière d'un nombre par 2 revient à enlever le chiffre le plus à droite de son écriture binaire.

**Méthode 9 : encoder en binaire de droite à gauche** Soit $k \in \mathbb{N}$ le nombre que l'on veut écrire en binaire.

— Si $k$ est pair, on sait que $b_0 = 0$. Pour avoir les autres chiffres, on encode en binaire $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$.

— Si $k$ est impair, on sait que $b_0 = 1$. Pour avoir les autres chiffres, on encode en binaire $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$.

**Exemple 10** Regardons comment cette méthode permet de retrouver l'écriture en binaire de 197.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre restant à encoder | 1 | 3 | 6 | 12 | 24 | 49 | 98 | 197 |
| Chiffre | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

On retrouve bien l'écriture binaire 11000101 pour 197.

**Exercice 11** En utilisant la même méthode que ci-dessus, donner l'écriture binaire de 250.

# 2 Entiers non-signés de taille fixe

En pratique, on se fixe souvent une limite du **nombre maximal de chiffres** qu'on peut utiliser dans notre écriture binaire.

Cela limite les nombres qu'on est capables d'écrire.

**Exercice 12**

1. Quel est le plus grand entier dont l'écriture en binaire a au plus 8 chiffres ?
2. De façon générale, quel est le plus grand entier dont l'écriture en binaire a au plus $n$ chiffres ? (Pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque).

## Les deux tailles les plus fréquentes

Quand on fixe à l'avance le nombre de chiffres utilisés, les tailles les plus fréquentes sont

— Utiliser 8 chiffres. Une écriture binaire à 8 chiffres est appelée un **octet**. On peut voir la mémoire de l'ordinateur comme une liste d'octets. De la même façon que pour une liste python il y a des *indices* et à chaque indice est associé un élément de la liste ; pour la mémoire de l'ordinateur il y a des *adresses* et à chaque adresse est associé un octet.

— Utiliser 64 chiffres. Cela correspond aux entiers pour lesquels les processeurs peuvent faire des calculs (addition, par exemple) *en une seule opération*. Cela correspond également à la taille des *registres* qui sont des petites mémoires très rapides situées à l'intérieur des processeurs.

## Arithmétique modulaire

Quand on utilise un nombre fixe $n$ de chiffres binaires pour écrire les entiers positifs, **tous les calculs sont faits modulo $\mathbf{2^n}$**.

Quand cela induit des erreurs de calcul, on parle de *débordement* (ou *integer overflow*, en anglais).

**Exemple 13 (débordement pour une somme).** Si on essaie de calculer la somme 10 + 12 **en n'utilisant que 4 chiffres binaires** on obtient :

— L'écriture binaire de 10 sur 4 chiffres est 1010

— L'écriture binaire de 12 sur 4 chiffres est 1100

— Sur 4 chiffres, on a 1010 + 1100 = 0110

— 0110 est l'écriture binaire sur 4 chiffres de l'entier positif 6

Le résultat obtenu est 6. Cela correspond au fait que $2^4 = 16$ et $10+12 \equiv 6[16]$.

Mais $10+12 \neq 6$, il y a donc eu débordement.

**Exercice 14** Quand on utilise des écritures binaires à 5 chiffres, quelle est le résultat de la somme de 19 et 31 ?

**Propriété 15** Si on a appelle $a_n$ le nombre dont l'écriture binaire à $n$ chiffres ne comporte que des 1, alors, avec une écriture à $n$ chiffres, on a :

$$a_n + 1 = 0$$

Cette propriété sera importante dans la section suivante.

**Exemple 16 : pour n = 4,** on a $1111 + 0001 = 0000$



# 3 Entiers signés en complément à 2

Jusqu'ici nous n'avons vu que la façon de représenter les entiers positifs en binaire. Dans cette section, on va voir une façon de représenter des entiers relatifs en binaire.

**Objectif 17 : représenter autant de nombres positifs que négatifs** On a vu qu'avec $n$ chiffres binaires on peut représenter $2^n$ nombres différents. Quand on représente des entiers relatifs, on coupe donc en 2 et on veut pouvoir

— Représenter $2^{n-1}$ chiffres positifs ou nuls : ceux dans $[\![0, 2^{n-1}-1]\!]$

— Représenter $2^{n-1}$ chiffres négatifs ou nuls : ceux dans $[\![-(2^{n-1}), -1]\!]$

**Objectif 18 : Pour les nombres positifs, utiliser leur écriture binaire**

**Objectif 19 : Garder le même opérateur d'addition.** Quand on fait la somme entre deux entiers représentés en binaire, on veut pouvoir utiliser le même algorithme que la représentation soit celle d'entiers positifs ou d'entiers relatifs. Cela va guider le choix de représentation.

En particulier, la propriété 15 doit rester vraie.

## 3.1 Exemple : complément à 2 sur 4 chiffres

**Pour respecter l'objectif 17**, avec $n = 4$ chiffres, on a $2^{n-1} = 2^3 = 8$, donc on veut représenter les nombres dans $[\![-8, 7]\!]$.

**Pour respecter l'objectif 18**, il faut poser

| Nombre | Représentation en complément à 2 sur 4 chiffres |
|---|---|
| 0 | 0000 |
| 1 | 0001 |
| 2 | 0010 |
| 3 | 0011 |
| 4 | 0100 |
| 5 | 0101 |
| 6 | 0110 |
| 7 | 0111 |

**Pour respecter l'objectif 19**, il faut avoir $1111 + 0001 = 0000$.

— On en déduit que 1111 représente $-1$.

— En soustrayant 1 à $-1$, on en déduit que $1111 - 0001 = 1110$ est la représentation de $-2$.

— En soustrayant 1 à $-2$, on en déduit que $1110 - 0001 = 1101$ est la représentation de $-3$.

— En soustrayant 1 à $-3$, on en déduit que $1101 - 0001 = 1100$ est la représentation de $-4$.

Et ainsi de suite, jusqu'à arriver $-8$ qui est le plus petit nombre négatif qu'on veut représenter :

| Nombre | Représentation en complément à 2 sur 4 chiffres |
|---|---|
| -1 | 1111 |
| -2 | 1110 |
| -3 | 1101 |
| -4 | 1100 |
| -5 | 1011 |
| -6 | 1010 |
| -7 | 1001 |
| -8 | 1000 |

Si on résume le tout en un seul tableau :

| Nombre | Représentation en complément à 2 sur 4 chiffres |
|---|---|
| -1 | 1111 |
| -2 | 1110 |
| -3 | 1101 |
| -4 | 1100 |
| -5 | 1011 |
| -6 | 1010 |
| -7 | 1001 |
| -8 | 1000 |
| 7 | 0111 |
| 6 | 0110 |
| 5 | 0101 |
| 4 | 0100 |
| 3 | 0011 |
| 2 | 0010 |
| 1 | 0001 |
| 0 | 0000 |

**Exercice 20** Donner la représentation en complément à 2 **sur 5 chiffres** des entiers -1, -2, -16, -15 et 5.

### Débordement en complément à 2

Si un jour vous observez un résultat négatif à un calcul qui devrait avoir un résultat positif, cela peut bien être dû à un débordement dans une représentation en complément à 2. Par exemple, en complément à 2 avec 4 chiffres, le calcul 3 + 7 = 0011 + 0111 = 1010 renvoie -6.

Bien sûr, un débordement peut aussi avoir un résultat positif (et tout aussi faux). Par exemple, (-5) + (- 7) = 1011 + 1001 = 0100 renvoie 4.

## 3.2 Complément à 2, cas général

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse maintenant à la représentation des entiers relatifs en complément à 2 sur n chiffres.

**Propriété 21 (Reconnaître les entiers négatifs).** Une représentation en complément à 2 représente un nombre négatif si et seulement si elle commence par 1.

Pour avoir une méthode rapide pour décoder un nombre négatif écrit en complément à 2, regardons ce qui se passe quand on change les 0 en 1 et les 1 en 0.

**Définition 22 (Complémentaire d'un chiffre).** Pour $b \in \{0,1\}$ on introduit la notation $\overline{b}$ pour parler du *complémentaire* de $b$, qu'on défini comme suit :

— Le complémentaire de 0 est 1. Dit autrement, $\overline{0} = 1$.

— Le complémentaire de 1 est 0. Dit autrement, $\overline{1} = 0$.

**Définition 23 (Complémentaire d'une écriture binaire).** Soit $b = (b_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une écriture binaire. Le complémentaire de $b$, noté $\overline{b}$ est la suite $\left(\overline{b_i}\right)_{0\leqslant i\leqslant n}$.

**Propriété 24 (Un nombre plus son complémentaire font $-1$)** Soit $b = (b_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une écriture binaire. Soit $\overline{b} = \left(\overline{b_i}\right)_{0\leqslant i\leqslant n}$ son complémentaire. Soit $s = (s_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ le résultat de leur somme sur $n$ chiffres. On peut montrer par une récurrence finie que pour chaque $i$, $s_i = 1$ et il n'y a pas de retenue.

Donc, avec une représentation en complément à 2,

$$b + \overline{b} = -1$$



En particulier, si $b$ représente un nombre négatif (c'est à dire si $b$ commence par un 1), alors

$$b = -\overline{b} - 1$$

Ceci nous donne une méthode très simple pour encoder et décoder des nombres négatifs en complément à 2.

#### 3.2.1 Méthode 25 : Décoder un nombre négatif en complément à 2

Si $b$ est l'écriture d'un nombre négatif en complément à 2, pour retrouver de quel nombre il s'agit, on peut :

— Passer au complémentaire $\overline{b}$

— Décoder l'écriture obtenue en tant qu'entier positif.

— Passer à l'opposé.

— Soustraire 1.

**Exemple 26** Pour une représentation en complément à 2 **sur 8 chiffres** on veut décoder

11011101

Pour cela :

— On passe au complémentaire, on obtient 00100010

— On décode en tant qu'entier positif, on obtient 34

— On passe à l'opposé, on obtient $-34$

— On soustrait 1, on obtient $-35$

Donc en complément à 2 sur 8 chiffres, 11011101 représente l'entier $-35$.

**Exercice 27**

1. En complément à 2 sur 8 chiffres, décoder 11110001.
2. En complément à 2 sur 8 chiffres, décoder 10000110.

#### 3.2.2 Méthode 28 : Encoder un nombre négatif k en complément à 2

— On encode $-k-1$.

— On passe au complémentaire.

**Exemple 29.** Pour encoder -95 sur 8 chiffres, on encode 94 en 01011110 puis on passe au complémentaire : 10100001.

**Exercice 30.** Encoder sur 8 chiffres les nombres $-62$ et $-120$.