TP 26 - Sudoku : graphe et coloriage

Contexte (case, bloc, ordre, grille, sudoku)

On appelle *case* un emplacement qui soit peut être vide, soit peut contenir un nombre. La case vide sera représentée par $\boxed{}$ et la case contenant un 7, par exemple, est représentée par $\boxed{7}$.
Soit $r \in \mathbb{N}^*$ un entier strictement positif.
On appelle *bloc* d'ordre r tout quadrillage carré de $r \times r$ cases. Un bloc est dit vide si toutes ses cases sont vides. Par exemple, le bloc vide d'ordre 2 est

On appelle *grille* d'ordre r tout quadrillage carré de $r \times r$ **blocs** d'ordre r. Une grille est dite *vide* si tous ses blocs sont vides. La grille vide d'ordre 2 est

Une grille de sudoku initiale d'ordre r est une grille d'ordre r où certaines cases sont vides, et les autres cases sont remplies avec des nombres compris entre 1 et r^2 inclus. Voici un exemple de grille de sudoku initiale d'ordre 2 :

2		1	
4			2
3	2	4	

Une grille finale associée à une grille initiale est une grille de même ordre, sans cases vides (toute les cases contiennent un nombre entre 1 et r^2), avec les mêmes nombres que la grille initiale pour les cases qui n'étaient pas vides, et telle qu'il n'y a pas de nombre répété sur une même ligne, un même colonne, ou un même bloc. Voici une grille finale associée à la grille initiale précédente :

2	3	1	4
4	1	3	2
3	2	4	1
1	4	2	3

Une grille initiale est *bien formée* s'il existe une et une seule grille finale qui lui est associée.

Liens avec les graphes et le coloriage de graphes

À une grille, on peut faire correspondre un graphe non-orienté où :

— Chaque sommet représente une case de la grille.

— Il y a une arête entre deux sommets s'ils représentent des cases se trouvant sur la **même ligne**.

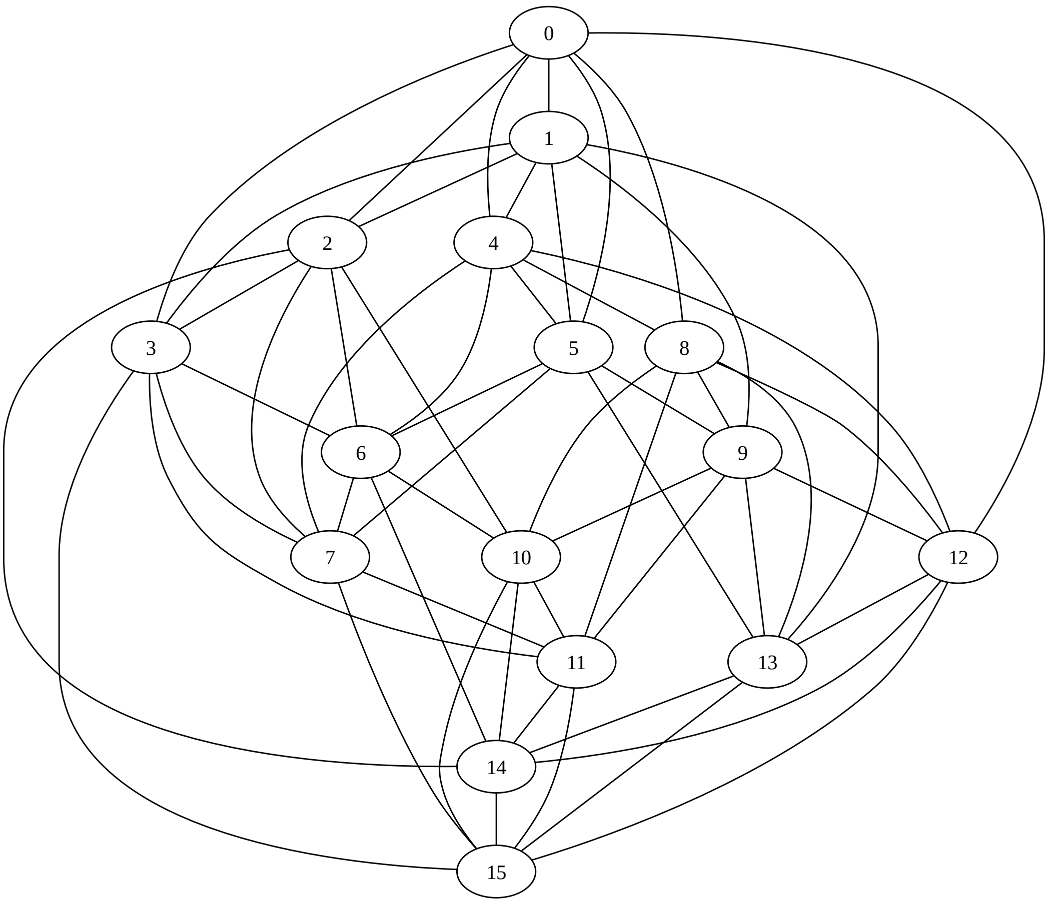
— Il y a une arête entre deux sommets s'ils représentent des cases se trouvant sur la **même colonne**.

— Il y a une arête entre deux sommets s'ils représentent des cases se trouvant dans le **même bloc**.

Pour une grille d'ordre r, le graphe associé a r^4 sommets. Si on identifie chaque sommet avec un indice entre 0 et $r^4 - 1$, en indiçant les cases de gauche à droite et de haut en bas ; et qu'on représente à l'intérieur de chaque case l'indice du sommet de graphe associé, cela donne, à l'ordre 2 :

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

Le graphe associé a beaucoup d'arêtes, ce qui peut le rendre difficile à représenter :



Fichier fourni

Un fichier `mpsi_itc_tp_26_squelette.py` est fourni avec un squelette de code et des fonctions de test pour la plupart des fonctions demandées.
Après avoir fini une question, pensez à décommenter la ligne qui lance le test associé, pour tester votre fonction.
Les tests peuvent servir d'exemple si une question ne vous semble pas claire.

Exercice 1 (Graphe modélisant le sudoku)

1. Codez une fonction `coordonnees_vers_indice` qui prend en arguments
   — Un ordre de grille $r \in \mathbb{N}^*$
   — Un indice de ligne `i` entre 0 et $r^2 - 1$
   — Un indice de colonne `j` entre 0 et $r^2 - 1$

   et qui renvoie en sortie l'indice du sommet représentant la case de coordonnées (i, j) dans le graphe représentant la grille d'ordre r. On supposera que les cases ont été indicées de 0 à $r^4 - 1$, de gauche à droite et de haut en bas.

   Par exemple,
   - `coordonnees_vers_indice(3, 0, 0)` doit renvoyer 0
   - `coordonnees_vers_indice(3, 8, 8)` doit renvoyer 80
   - `coordonnees_vers_indice(3, 1, 2)` doit renvoyer 11.
2. Codez une fonction `clique` qui prend en argument une liste d'indices de sommets, et renvoie une liste d'arêtes décrivant une clique entre ces sommets. On manipule ici des graphes non-orientés, donc il faudra pour toute arête que son arête symétrique soit également présente. Chaque arête sera une paire d'indices de sommets. On n'impose pas d'ordre particulier entre les différentes arêtes.

   Par exemple, pour `clique([5, 7])` un résultat acceptable est `[(5, 7), (7, 5)]`. Autre exemple, pour `clique([3, 6, 8])` un résultat acceptable est `[(3, 6), (3, 8), (6, 3), (6, 8), (8, 3), (8, 6)]`.
3. En utilisant les fonctions précédentes, codez une fonction `ordre_vers_grille` qui prend en argument un entier $r \in \mathbb{N}^*$ et renvoie le graphe représentant une grille vide d'ordre r.

   Le graphe sera représenté par une paire dont le premier élément est le nombre de sommets, et le deuxième argument est une liste d'arêtes. Chaque arête est une paire d'indices de sommets.

   Il y aura une arête entre deux sommets si
   — Les deux sommets en question représentent des cases qui sont sur la même ligne de la grille
   — Les deux sommets en question représentent des cases qui sont sur la même colonne de la grille
   — Les deux sommets en question représentent des cases qui sont dans le même bloc de la grille

Exercice 2 (Remplissages de grille comme coloriages de graphe)

Un remplissage d'une grille de sudoku d'ordre r peut être vu comme un coloriage du graphe représentant la grille vide d'ordre r, avec des couleurs allant de 1 à r^2.
On représentera un tel coloriage avec une liste de r^4 entiers (un pour chaque sommet du graphe). On utilisera les entiers entre 1 et r^2 pour représenter les différentes couleurs, et l'entier 0 pour représenter l'absence de couleur.

1. Codez une fonction `complete` qui prend en arguments un coloriage partiel et un coloriage total, et qui
   — Échoue en lançant une erreur si les deux coloriages n'ont pas la même taille ; ou si le deuxième coloriage n'est pas total.
   — Renvoie `True` si tous les sommets déjà coloriés dans le coloriage partiel ont la même couleur dans le coloriage total ; et `False` sinon.
2. Codez une fonction `valide` prenant en argument un graphe et un coloriage, et qui renvoie un booléen indiquant si le coloriage passé en argument est valide, c'est à dire n'attribue pas la même couleur à deux sommets reliés par une arête.

   Le graphe en entrée est représenté par une paire $(\text{nombreDeSommets}, \text{ListeDAretes})$.

Pour aller plus loin : polynôme chromatique d'un graphe

On peut montrer que pour tout graphe G il existe un polynôme $\chi(G)$ qui, évalué en un nombre de couleurs k, renvoie le nombre de coloriages différents possibles de G avec au plus k couleurs. En s'y prenant bien, vérifier qu'une grille de sudoku partiellement remplie admet une et une seule façon d'être complétée revient à calculer le polynôme chromatique d'un certain graphe, puis de vérifier qu'évalué en r^2 le résultat vaut 1.
Vous trouverez une description vulgarisée de cette méthode dans l'article suivant : `https://mast.queensu.ca/~murty/sudoku-ams.pdf`. L'une des preuves de cet article contient cependant une erreur subtile. Si vous voulez implémenter les algorithmes correspondants, allez plutôt regarder les preuves sur les polynômes chromatiques présentes dans ce livre, cité par l'article : `https://sites.math.rutgers.edu/~zeilberg/akherim/VanlintWilson.pdf`.