Invariant de boucle du tri par insertion

1. La variable i commence à 2.
2. $A = [27, 10, 12, 8, 11]$ $\qquad A1 = A[1..i-1]$

$i = 2 \quad A_1 = [27]$

$A = [27, 10, 12, 8, 11]$

clé

$A = [27, 27, 12, 8, 11]$

$A = [10, 27, 12, 8, 11]$

$i = 3 \quad A_1 = [10, 27]$

clé

$A = [10, 27, 27, 8, 11]$

$A = [10, 12, 27, 8, 11]$

Zone où on cherche la place de la clé.

$i = 4 \quad A_1 = [10, 12, 27]$

clé

$A = [10, 12, 27, 27, 11]$

$A = [10, 12, 12, 27, 11]$

$A = [10, 10, 12, 27, 11]$

$A = [8, 10, 12, 27, 11]$

$i = 5 \quad A_1 = [8, 10, 12, 27]$

$A = [8, 10, 12, 27, 27]$ clé

$A = [8, 10, 12, 12, 27]$

$A = [8, 10, 11, 12, 27]$

3. Au début de chaque itération, <u>$A1$ est trié</u> !

Montrons que "le sous-tableau $A[1..i-1]$ est trié" est bien un invariant de boucle pour montrer l'exactitude de cet algo. de tri, c.à.d qu'il renvoie le tableau A trié.

4. Initialisation : avant de parcourir la boucle pour la 1ère fois, avant de commencer l'étape 1A quand $i=2$, est-ce l'invariant de boucle est vrai ?
Le sous-tableau $A[1..1]$ ne contient qu'un seul élément, il est donc trié.

5. Conservation : au début de l'itération i, je suppose que le sous tableau $A[1..i-1]$ est trié.
Que fait la boucle de l'étape 1 ? Pour cela, il faut faire des schémas pour comprendre ce qui se passe. On décale les valeurs $A[i-1]$, $A[i-2]$, ... d'une position vers la droite jusqu'à ce qu'on trouve la position pour la clé qui est $A[i]$.
Arrivé à l'étape 1C, le sous-tableau $A[1..i]$ est trié.
Il faut maintenant prendre en compte l'itération cachée qui a lieu quand on revient à l'étape 1 : i devient $i+1 = i'$.
~~L'invariant de boucle est à ce moment~~ "Le sous-tableau $A[1..i]$ est trié" devient "Le sous-tableau $A[1..i'-1]$ est trié" avec i' la nouvelle valeur de i au début de l'itération suivante. L'invariant de boucle est donc conservé.

6. Terminaison : que se passe-t-il quand la boucle de l'étape 1 se termine ? et Pourquoi se termine-t-elle ?
Elle se termine parce que $i > n$ ou plus précisément $i = n+1$.
On a alors $i-1 = n$ et l'invariant de boucle est alors "le sous-tableau $A[1..n]$ est trié". Mais ce sous-tableau est le tableau A lui-même ! Il est donc maintenant trié.